View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Joetsu University of Education

上越数学教育研究, 第 18 号, 上越教育大学数学教室, 2003 年, pp.89-100.

高等学校における数学授業の改善に関する研究

所属　上越教育大学大学院学校教育研究科
学習臨床コース学習過程臨床分野２年
近藤　浩一

1. はじめに

現在の高校数学の授業は，指導要領に従ったカリキュラムで実施されている。しかし，その指導要領による教科書の内容は一部の生徒にとっては難しすぎて，興味を持って取り組めるものにはなっていない。特に職業高校においては，受験で数学を選択する生徒はほとんどいないにもかかわらず，そこでの授業の目的は，受験がミニサイズ化した定期テストの準備となっている。そのテストの得点で数学の成績（評定）が決定することになる。本来，生徒や教師やカリキュラムにフィードバックされるべき評価が，フィードバックせずに単なる数字としての評定に収束しているのが現状である。

テスト，授業，評価が相互に関連しあって，高校の数学の授業は成立している。それを改善するために，テストでいい点数をとることが目的ではなく，自分の興味関心に従い，生徒自らが他の生徒，教師と関わり合いながら，積極的に学習していくためには，数学的活動を中心とした授業が必要になる。フロイデンタール(1991)は，「活動としての数学は，本において印刷され，心に刻みつけられた数学とはまったく異なる見地である。……　すべての研究者，数学のすべての生産者は，数学が活動的であることを容易に認めるであろう。―彼のプライベートな活動―その成果は，公表されないかもしれない。」(p14)と数学することは本来，活動であると述べている。また，ランパート（1990）の「数学活動の結果は演繹的証明によって正当化されている。だが，この結果は，＜数学をわかっていく＞過程を表しているわけではない。」(p189)にあるように，数学をわかることは，教師からの説明を聞いてわかるのではない。活動をする中で，試行錯誤を繰り返して，一般と特殊をいったりきたりしながら理解が深まっていく。そこでは，知識を注入，伝達するのでなく，数学的活動を通して，自らが考え，数学的な概念をつくり出していくことが目標になる。このことを具体的に実現する方策を実証的に研究するのが本論文の目的である。

2. 高校で数学的活動を実現するための観点

数学的活動を以下に述べる２つの軸から考察してみる。

第１は，数学と人のかかわりにより数学そのものがつくられる活動の軸である。

第２は，数学を対象とした人と人のかかわり（コミュニケーション）の活動の軸である。

第１の軸は，島田やフロイデンタールが提唱してきた活動である。

島田（1977）は，数学的活動を１つの模式図に表し，次のように述べている。「この模式は，人間が数学をつくり出してきた歴史的発展を映しているとも見られるし，また個体発生は種の歴史を繰り返すという意味で，子どもたちが数学を学習していく過程を映しているとも見られる。」(p14)

模式図に見られる数学的活動の特徴は，仮説

と検証を繰り返しながら，一般化，抽象化し，１つの数学理論をつくっていく過程である。しかし，高校数学の授業では，数学的な考え方をつくるのに重要である仮説と検証の部分を省略して，テストの得点を高めるスキルを教えることに重点が置かれていることが多い。これを改善するために，第１の軸の数学的活動が必要である。

次に，その第１の軸に対して，コミュニケーションを中心とした第２の軸を付け加えてみる。すると違った視点での数学的活動の方向が見えてくる。高校数学授業では，１人で問題を考えることが中心で, グループやクラスで話し合い，討論しながら問題を考えていくことはほとんどない。これは，一般社会の問題を解決する場面から見ると非常に特別な状況であると言わざるを得ない。

数学の問題に対して，話し合いを通して，仮説と検証を繰り返していくものにランパート（1990）の実践がある。ランパートの実践のように数学的活動に，話し合いや発表などの共に学ぶコミュニケーションの活動を取り入れることも，高等学校数学の改善には必要である。この数学的活動の第１，２の軸を中心にした授業の方策を以下に考察してみた。

3．数学的活動の評価

この２つの軸で仮説と検証を重視する数学的活動を中心とした授業は，結果よりも，その結果に到った仮説と検証を繰り返した過程や他の生徒や教師とのかかわりや話し合いの状況を評価することになる。今までの，単元終了後のペーパーテストでは，その仮説と検証を繰り返している過程を見ることができない。その過程を評価するのに適している評価方法として，ポートフォリオ評価がある。

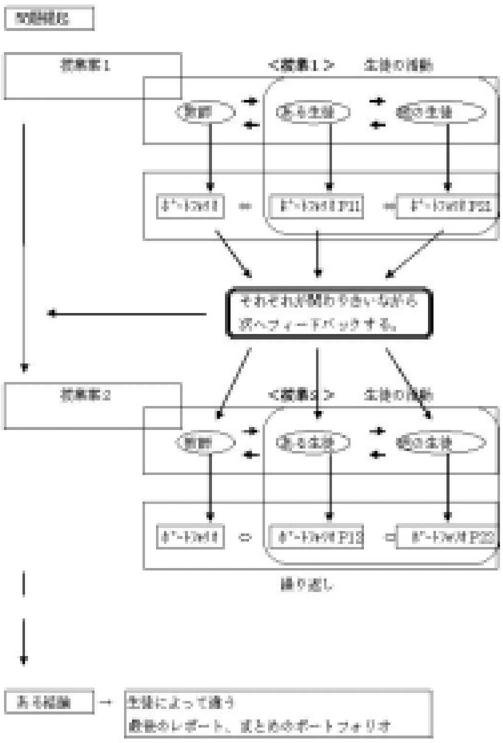
ポートフォリオ(portfolio)とは, もともと書類入れやファイルを意味する。加納(2002)によれば，ポートフォリオ評価の，ポートフォリオは，学習の過程において生徒が作成したさまざまなレポートやテストの答案や作品から，日記，ビデオテープ，教師の助言まですべてをはさみ込んだものになっている。(p23)

そして，それは，一人の生徒が行ったすべての活動や学習の総合作品集であると同時に，学びの履歴といえる。そのポートフォリオを学習評価に用いたものがポートフォリオ評価法である。

高野(2000)によれば, もともとこの方法は，ロンドン大学のＳ．クラークらを中心に開発されたもので，イギリスでは 1988 年の教育改革法によるナショナル・カリキュラムの導入以降，GCSE など公的テストで測定できない質的評価方法として，すでに多くの学校で評価法として活用されている。アメリカでも，特に 1980 年代以降，増加する公的テストへの反省からいわゆる「真の評価」（Authentic Evaluation）または「代替的評価」（Alternative Assessment）が提唱されるようになり，その代表的な方法として，理論的研究とともに，おもに中等学校レベルでの活用方法・活用事例が開発されている。

筆者は，ポートフォリオと授業の関係を関係付けるものとして，フィードバックを考えた。そして，生徒のポートフォリオが次の授業案にフィードバックし，その授業案をより生徒の現状にあったものに変えていくようなモデルを考えた。それが以下の図３である。

まず，問題提起で，現実世界に関わるオープンエンドな問題を設定する。その問題に対して，さまざまな考察を行い，長いスパンの授業計画をつくる。問題提起を授業案１として計画し，その問題を生徒個人やグループや教師で，話し合い，討論する。そのような形で学びあう共同体を作り，生徒，教師が一体となって学習を進めていく。そして，そこでの話し合いの様子，感じたことをポートフォリオに記録していく。教師は，生徒のポートフォリオを見て，生徒に評価を返す。生徒たちはお互いのポートフォリオを見合う中で，お互いの生徒に評価を返していく。それらを参考に，生徒個人が自分を振り返り，わかったことや感想をポートフォリオに記入する。話し合い，記録することで，今までの活動を振り返り，さらに，その問題に含まれる数



＜図３＞

学的概念の理解を深めることができる。そして，教師は，授業の様子と生徒たちのポートフォリオをみて，次の授業案２を作成する。状況によっては，最初に予定した授業計画と違ってくる場合もある。図３では，上述のことを「それぞれが関わりあいながら次へフィードバックする。」段階とした。

このように，前の授業の評価が次の授業へフィードバックしていく。それを授業２，授業３と繰り返していく。

そして，最初の問題が解決していき，ある結論となる。その後，生徒は今までの活動の履歴であるポートフォリオを参考に，最終的なレポート，まとめのポートフォリオを作成する。その中でよいものは，次の授業計画での生徒の活動の見本として活用していく。

教師も授業の計画，様子をポートフォリオに記録し，修正しながら，よりよいカリキュラムを開発していく。また，教師用ポートフォリオの中には，授業案，教材研究，生徒の予想外の反応とそれに対する考察などがファイルされている。そして，そのポートフォリオは次の授業を計画する際の重要な資料となる。そして，授業を実施するごとにより充実したものに成長していく。

４．授業計画について

数学的活動の柱を，仮説と検証とし，その数学的活動に２つの軸を考え，その活動の過程を，ポートフォリオによって，フィードバックしながら評価していくものとして，以下の授業を計画した。

対象生徒は，職業高校である県立高等学校の３年生 25 名である。授業は，選択数学で１，２年次の復習を主に行う科目である。１週間に，50 分間授業を２回連続で４回実施した。

課題は次のようにした。

学校の中で一番急な階段，緩やかな階段はどこでしょうか。探してみよう。

最初の時点での授業計画は以下の通りである。

まず，ポートフォリオ評価について説明を行い，課題を説明する。次に，階段の緩急を比べるにはどのような方法があるのかを最初は個人，次にグループで考察させる。そして，その方法で，試しに，生徒玄関の階段と近くの階段を測ってみて，どちらが急な階段なのかを判定する。その結果をもとに学校全体の階段の緩急を比べる方法をグループ間の話し合いで決定する。その後，各グループで分担して，一番急な階段，緩やかな階段の候補の場所を測定する。その結果を持ち寄り，学校で一番急な階段，緩やかな階段を決定し，レポートにまとめる。

５．授業の実際

(1)階段の緩急を比べる方法：第1時

課題について説明すると，生徒たちは，予想以上の興味を示した。始めは，生徒個人でどのようにしたらよいのかを考えさせた。次に，５つのグループ A，B，C，D，E で話し合いをして，グループで１つの方法を決めることにした。そこでは，活発な話し合いが行われた。最終的に，以下の５つの方法に，グループの測定方法がまとまった。

Ａ：階段の数が多いほど急

Ｂ：横－高さの値が少ないほど急

Ｃ：階段の横幅が短いほど急

D：水平面に関する角度が大きいほど急

E：三角比で比べる。階段３段分のたてと横の長さをはかり，三平方の定理から横の長さを計算して，タンジェントの値を求め，三角比の表から角度を求める。

そして，各グループでその５つの方法で，生徒玄関の階段と近くの階段を実際に測定して比べてみることにした。（表１参照）

すると，これらの５つの方法では，すべて生徒玄関の方が緩やかである結論になる。２つの階段の階段を比べる方法としては正しい可能性があることになる。

＜表１＞

実際の階段のデータ（階段１段分）

	生徒玄関	近くの階段
段数	3	11
横（cm）	41	28
縦（cm）	15.5	17.5
斜め（cm）	44	33
角度（°）	20	32
横－縦	25.5	10.5

(2)階段の模型の作成：第2時

前回の授業結果を授業計画にフィードバックして，陸上競技場の観客席と階段を参考にして，新たに階段の模型の作成をすることにした。工作用紙で，縦と横の比が同じ階段を作成し，その模型の縦，横，斜め，角度を測定して，前時の５つの方法で比べてみることにした。表２が，生徒が実際に作った階段の模型の例である。（一部のみ）

＜表２＞

作品番号	階段の数	横（cm）	縦（cm）	斜め（cm）	角度（°）	幅（cm）
A1	6	3	2	3.5	35	14
A2	5	3	2	3.5	35	3
A3	2	6	4	7.3	?	6
B1	4	1	1	1.4	45	4
B2	4	4	4	5.6	45	4
B3	4	2	2	2.8	45	10
B4	2	4	4	5.6	45	8
C1	4	3	3	4.5	40	15
C2	2	6	6	9	50	18

(3)5つの方法の確認：第3時

この階段の模型に対して，５つの方法で比べるのとどうなるか考えた。その結果, まず, 階段の数は，階段の角度と関係ないことがわかった。Ａグループの方法は，成り立たないことがわかった。次に, Ｂグループの方法は, Ａグループの階段モデルで，横と縦の差が, 3－2＝１と 6－4＝2 で違っているのに, 角度が同じ 35°の場合があることがある。これにより，Ｂグループの方法は成り立たないことがわかった。最後に縦と横の長さの比が等しければ，横の長さにかかわらず，階段の角度が等しくなる。これにより，Ｃグループの方法は成り立たないことがわかった。最終的に, 5 つの方法を統一して，角度と辺の比で比べることに統一した。

その後，各グループに分かれて，校舎内で急な階段，緩やかな階段の候補を考え，実際にその階段を測定した。

(4) 第4時以降の状況

第４時に，第３時に不十分であった測定値をもう一度測定し, 以下の表３を完成させた。

そして，その表から校舎内で一番急な階段と緩やかな階段のレポートを書くことにした。このレポートは，時間の都合で，期末テストの時間に実施した。

第４時の後半には, カクシリキを作成した。そのカクシリキで，各グループで測定した階段を確かめてみることにしたが，時間の都合で実施できなかった。その換わりに，夏休みの宿題として，カクシリキを使ったレポートを実施することにした。

第５時には，期末テストの解説と階段の緩急と三角比の関係について考察した。

＜表３＞

	場所	縦(cm)	横(cm)	斜め(cm)	角度(°)
A	1棟、2棟の渡り廊下	16	36	42.5	15
A	3棟西の階段	17	27.5	31	30
A	非常階段	16	26.5	32	31
B	[illegible]の横の階段	16.5	31	36	23
B	パソコンの階段	17	31	32	
C	1棟と2棟の1階の渡り廊下	15	40	42.5	20
C	屋上へいく階段	17.5	30	32	30
D	体育館ギャラリーへの道	17.7	29	31	20
D	1、2棟間の渡り廊下2F	17	42.5	43.5	12~13
D'	1棟と2棟の1階の渡り廊下	15	39.5		21
E	第1体育館2Fの倉庫	23	25.5	31.5	
E	バレー部とバドミントン部の階段	20	24.8	32.5	

6．生徒の活動から教師へのフィードバック

(1)生徒個人の考えのフィードバック

この課題は，生徒にとって具体的に考えることのできる課題であったため，生徒の中で発話が自然に起こった。「あのさ,むこうのさ,急な階段とか。」，「全部同じじゃないの。」，「ねてみればいい。」という発言から，分かるように，生徒の頭の中には，以下の２つのことが想像されていた。第１に自分の経験から判断した学校のなかで一番急な階段，緩やかな階段の具体的なリストである。第２に，緩急を判断する具体的な方法である。最初の課題は，そのどちらにも進める形の問題設定になっていた。階段の緩急を比べる方法を生徒個人の考えた結果は，ポートフォリオに書いたものから見ると，階段の緩急を

① 階段に板をおいた斜めのライン（角度)。
② 縦の長さ（段差)。
③ 体を使って（感覚)。

の３通りの方法で判断していた。

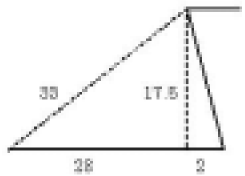
階段の緩急は，外延量としての角度，内包量としての勾配（土台量が空間型，分布量が位差型）で表すことができる。まず，外延量として，①の角度と②の縦の長さが比べる方法となる。また，内包量としての勾配は，角度の外延量より，直接，体に感じるものがあり，日常生活でも多く体験している。このことが，③の体を使ってという感覚で考える方法が多くでてきた原因である。

生徒の考え方をみると，教師の側で期待していた辺の比を使う方法(三角比を使う方法)はなかった。生徒の中には，角度と勾配の関連付けができにくいことがわかる。内包量より，目に見える外延量の角度，長さ（段差）で判断する傾向がわかる。だた，③の体で感じる方法は，内包量としての勾配を感じるとすると辺の比にもつながる可能性を持っている。この生徒の考え方を大切にして，①の方法からは三角比との関連を付けること，②，③の方法には，比べることができない場合があることを，生徒自身が納得するように授業計画を考えていくことにした。

このことにより，比の考え方は簡単には使えない知識であること，生徒の考えを大切にして授業計画を進めること，以上２点が教師側へフィードバックした。

(2)実際の測定値のフィードバック（階段の形状との関係）

Ｂ，Ｃグループの近くの階段の横の値が，実際の値と異なっているのは，階段の形状によるものである。階段は，以下の図４のように，縦と横が直角になっていない。Ｂグループは，高さを，水平面に直角になるように測定した。理由は，小学校以来の三角形や平行四辺形の面積の公式における高さや立体図形の体積を求める際の高さが直角であることのこれまでの高さに関する知識が影響を与えている可能性がある。横の長さは，直角と関係なく実際の長さを測ることが多い。Ｂ，Ｃグループともに実際の長さを測定していた。



＜図４＞

生徒は，無意識のうちに，高さは，底面に垂直に，横の長さは実際の長さで測定されていることがこのことによりわかった。逆に言えることは，教師側としては，物事を数学的に考えようとするあまり，階段を直角三角形と理想化し，その先入観に縛られてさまざまな考え方の可能性を閉ざしてしまっていた。そのことが，教師の側へフィードバックした。そして，階段の形状を直角三角形にどのように結び付けていくかという事実を次の授業にどう生かしていくかが今後の課題となった。その課題は，三角比と角度の関係をもう一度見直し，理解を深める機会となる。

7．授業計画と生徒教師へのフィードバック

(1)授業計画へのフィードバック

最初の計画では，いくつか出た方法から，ＤとＥに代表される角度を測る方法と縦と横

の長さを測定し三角比で角を求める方法の２つに絞り，方法を統一する予定であった。しかし，第１次の授業の結果，予想もしなかったＡ，Ｂ，Ｃの方法が出てきた。このため，これらの３つの方法では，矛盾が出てくる階段があることを示す必要があると考えた。それには，その階段を具体的に示すことが重要である。それを見ることにより，矛盾が一目瞭然でわかる。そして，階段の緩急についての考えを深めることができる。そのため，予定にはなかった階段の模型づくりの新しい授業計画を入れることにした。これは，陸上競技場の観客席と階段の様子をヒントにしたものである。工作用紙で，観客席と階段の関係をモデル化したもので，ある 1 つの階段とその階段の縦と横の長さを 2 倍にした階段の 2 つの模型を作ることにした。その２つの模型を 5 つの方法で比べてみることに，授業計画を変更した。そして，その活動を行う中で，階段の構造に対する理解が深まり，階段の緩急を決める方法を統一することが出来ると考えた。

また，その活動の中で，Ａ，Ｂ，Ｃの方法の矛盾点が以下のように明らかになる。

まず，Ａの方法は，2 つの模型で階段の数が違っているとすると，2 つの階段の模型の傾きは等しいので，階段の数と緩急は関係ないことがわかる。次に，Ｂの方法は，縦と横の長さの比が違っている階段の 2 つの模型に対して考えると，傾きは等しいが，横と縦の差は，縦と横の長さを 2 倍にしたものがもとのよりは大きくなるので，縦と横では比べられないことがわかる。縦と横の長さが同じ階段に対しては，差は両方とも 0 になり矛盾は生じない。最後に，Ｃの方法は，縦と横の長さを 2 倍にした階段の模型ともとの階段の模型の傾きは等しいが，明らかに横の長さは 2 倍のほうが大きくなっているので，横の長さでは比べられないことがわかる。

このように，第 1 時の生徒の活動の状態が，次の授業計画にフィードバックして，今までの授業計画を，よりその活動にあった形に変更していくことができた。

(2)教師へのフィードバック

生徒の活動による授業計画へのフィードバックと同時に，生徒の活動が教師自身の活動にもフィードバックしていた。それは，以下のことである。

生徒の考えた方法で，Ａの方法は，一般の場合に成り立たないのは明らかである。しかし，ＢやＣの方法が実際の建築物では有効な方法であることも考えられる。このことを検証するため，建築基準法を調べて，その基準の中では，ＢやＣの方法が使えるのかどうかを検証してみた。

この建築基準法を満たすように，縦と横の長さを変化させ，Ｂ，Ｃの方法で比べることが出来るかどうか，数値実験をしてみることにした。その際，常識的な数値の建築基準法を満たす階段として，縦を 18cm～16cm，横を 26cm～30cm とした。縦と横の長さをその範囲で変化させ，差，タンジェント，角度の値をそれぞれ計算してみた。すると，建築基準法を満たしながらもＢ，Ｃの方法で矛盾のあることがわかった。しかし，その数値実験から，Ｂの方法は，矛盾の量が少なく現実的には有効な方法であることがわかった。

以上のように，生徒の活動を教師自身の活動にフィードバックして，新たな課題（カリキュラム）を考えることができた。この課題は，今回は授業計画の中には入れなかった。いつかの機会に応用編として計画の中に組み込む予定である。

8. 新たな課題

この階段の課題を考えたときも周辺の話題としても考察していたが，生徒のポートフォリオの中にもあったので，斜面の角度をボールの転がる速さによって求める方法をもう一度，考察してみることにした。

斜面の角度が 17°以内であれば，１％の誤差の範囲で，斜面の角度は，一定の長さの斜面を転がる球の時間の 2 乗に反比例していることがわかった。

その様子を，自分がこの問題を考察する中

で，仮説と検証を繰り返して，試行錯誤していきながら１つの理論を作っていく過程として，記録してみた。

⑴力の法則から考える

ボールの重さをｍとすれば，斜面方向にボールを動かす力Ｆは，図５より，F=mgsinθとなるから，Ｆ＝ｍαより，

加速度は，α＝gsinθ

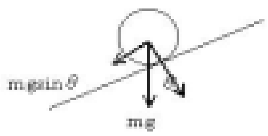
これを，積分して，

$v = g\sin\theta\, t$

さらに積分して，

$s = \frac{1}{2} g \sin\theta\, t^2$

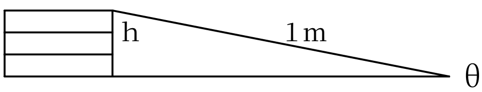
となる。



＜図５＞

⑵実験について

図６のように，１ｍの長さのプラスチック製のＬ型アングルの上の斜面をビー玉が転がる時間を計測してみた。斜面の高さは，高さ2.4㎝ のビデオテープを重ねることで，４段階に変化させた。時間は，10 回計測し，その平均を小数第１位まで求めた。



＜図６＞

斜面の高さをｈ㎝，斜面の角度をθとすると，(1)より

$s = \frac{1}{2} g \sin\theta\, t^2$

が成り立つ。

これに，ｓ＝1m，ｇ＝9.8m/ｓ^2，

$\sin\theta = \frac{h}{100}$　を代入して，

$1 = \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot \frac{h}{100} t^2$

より，

$t = \sqrt{\frac{200}{9.8h}} = \frac{4.517}{\sqrt{h}}$

となる。

実際の計測結果と比べてみると，表４のようになる。

＜表４＞

h	実際のt	計算上のt
2.4	3.7	2.916059
4.8	2.5	2.061965
7.2	2	1.683588
9.6	1.7	1.45803

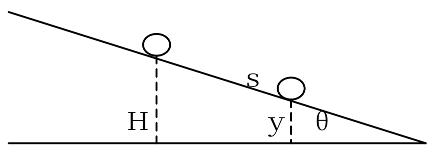
計算上より，ビー玉の速度が遅くなっていることがわかる。

⑷ビー玉の回転を考える

実際の速度が，計算上の速度より，遅くなっている原因として，摩擦力とビー玉の回転の２つが考えられる。まず，摩擦力は，この場合は，転がり摩擦となり，地面が柔らかい場合以外は，ほとんど無視していいことが分かった。回転の方は，物理での剛体の運動を参考にすると，ビー玉の回転にエネルギーが使われ，(1)の摩擦がなく転がらない場合と比べて，落ちる速度が遅くなることがわかった。

戸田（1981）を参考に，回転を考慮した式を求めてみる。

図７のように，最初Hの高さにあった静止した球が，高さyまで落ちたとき，球の半径をａ，質量をM，斜面に沿う速度をvとし，慣性モーメントをＩ，回転の角速度をωとする。斜面の傾きをθ，斜面に沿う距離をsとする。



＜図７＞

エネルギー保存の法則より

$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgy = MgH$ …①

面と球の間に滑りがないとすると

$a\omega = v$

が成り立つ。よって

$$\frac{1}{2}(M + \frac{I}{a^2})v^2 + Mgy = MgH$$

また，$s\sin\theta = H - y$　より，

$$v = \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{dy}{dt}$$

①を時間tで微分すれば,

$$(M + \frac{I}{a^2})v\frac{dv}{dt} = -Mg\frac{dy}{dt}$$

ゆえに

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M + \frac{I}{a^2}}Mg\sin\theta$$

一様な球では，慣性モーメントは

$$\mathrm{I} = \frac{2}{5}Ma^2$$

より，代入して

$$\frac{dv}{dt} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

これは，加速度のことだから，速度vと距離sは

$$v = \frac{5}{7}g\sin\theta\, t$$

$$s = \frac{5}{14}g\sin\theta\, t^2 \quad \cdots\cdots②$$

となる。

②で，重力加速度g＝9.8㎜/s^{2}を既知とすれば，長さs，時間tが測定できれば，sinθの値を計算できる。すなわち斜面の角度θを求めることができる。

先ほどの実験をこの式で確認してみた。

図７のように斜面の高さをh㎝，斜面の角度をθとする。

ここで，②の式に

$g = 9.8$　，$s = 1$　,$\sin\theta = \frac{h}{100}$　を代入すると

$$1 = \frac{5}{14}9.8\frac{h}{100}t^2$$

これをｔについて解くと

$$t = \sqrt{\frac{1400}{49h}} \quad \cdots\cdots \quad ③$$

この式で, 実際の計測結果と比べてみると, 表５のようになる。

＜表５＞

h	実際のt	③で計算したtの値
2.4	3.7	3.4503278
4.8	2.5	2.43975018
7.2	2	1.99204768
9.6	1.7	1.7251639

実際に10回測定した時間の平均値が, ほぼ, 計算上の時間と一致していていることがわかる。やはり回転のエネルギーを考慮する必要があることがわかった。

また，この結果より，ビー玉が斜面を下る時間を測定することで，斜面の傾きの角度を求めることができる。

それは，②の式を，θについて解くと

$$\sin\theta = \frac{14s}{5gt^2}$$

よって

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{14s}{5gt^2}\right)$$

この式の近似式を考えてみる。

級数展開により

$$\sin^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\sin^{-1}x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \quad \cdots\cdot$$

この場合，$\frac{14s}{5gt^2} < 0.0209$　だから，ｘの３次以降の項は, ほとんど０と考えられるので,

$$\theta = \frac{14s}{5gt^2}$$

になる。角度の単位のラジアンを度に直すと

$$\theta = \frac{14s}{5gt^2}\frac{180}{\pi}$$

$s=1,\ \ g=9.8,\ \ \pi=3.14$を代入して

$$\theta = \frac{16.4}{t^2} \quad \cdots\cdots④$$

となる。

しかし，このことをもう一度考え直してみると，θの値が０に近いのであるから，

$$\theta = \sin\theta$$

が成り立つので，そのまま

$$\theta = \sin\theta = \frac{14s}{5gt^2} = \frac{16.4}{t^2} \quad \cdots\cdots④'$$

となる。このように，簡単に考えればよいことがわかる。普通の数学的な記述であれば，後者のわかりやすい方法だけを記述することが多い。しかし，筆者自身の数学的活動を表す１つの例として，２通りの場合で表してみた。④の式で計算した値と，測定値を比べてみる。

＜表６＞

高さh (cm)	実際のt (秒)	sin θ	角度θ	式④で計算したθ
2.4	3.7	0.024	1.375	1.198
4.8	2.5	0.048	2.751	2.624
7.2	2	0.072	4.129	4.1
9.6	1.7	0.096	5.509	5.675

これによると，④の近似式も，ｔが小さいときは，ほぼ等しいことがわかる。斜面の角度は,時間の２乗に反比例することがわかる。

このことにより，一定の長さの斜面を転がる球の時間を測定することにより，斜面の角度を求めることができることがわかる。

また, 近似式$\sin\theta = \theta$が成り立つ範囲を考察すると以下のようになっていた。

10°以下の角度で，誤差 0.5%以内，17°以下の角度で誤差 1%以内，32°以下の角で誤差 5%以内，43°以下で，誤差 10%以内となっていた。10°以下の斜面であれば，ほぼ成り立つことがわかった。

2 乗に反比例する関数は，他に，重力，磁力，光の強さなど 1 点から空間に広がっている物理現象に関する公式として出てくることが多い。この斜面の角度と速さの関係は，近似式とはいえ，重力，磁力，光の強さ等の測定しにくいものと比べて簡単な装置で，測定でき，実験できる点が面白い。今後，この考えを生かした課題を考察してみたい。

9．数学的活動の仮説と検証とコミュニケーションの軸

(1)グループ活動で概念が形成される場面

話し合いの中で，階段の定義がまとまっていく場面として，以下を紹介する。

課題を最初に示したとき, D グループのN，Kを中心に「はしごは階段なのか」,「ステージは階段なのか」等の発言があった。そこから，D グループでは，階段の定義に関する話し合いが活発に起こった。「ステージは階段なのか」という問いに対して，１段しかないものは階段ではないという合意がグループの中でつくられた。その合意は，ほかのグループにも, 教師のかかわりを通じてつくられた。クラスの中で，１段しかない階段，ステージのようなものは階段ではないという合意ができた。これは，ランパート(1990)の実践にみる数学的活動の用語や記号，定義を明確にすることでみられた活動と同様な活動である。この場合は，階段とは何かという定義を生徒たちの話し合いの中から明確化していくことになる。このように，定義がはっきりしない課題に対して，コミュニケーションをとり，その定義をはっきりしていくことは，必要不可欠で，自然に起こる重要な数学的活動である。このことは，最初の授業計画では，考えていなかったことであるが，話し合いを進めていく上では，必要な活動であった。

そして，Kを中心に教科書を３段に重ねた階段のモデルを作り，定規と分度器を当てながら，どのように階段の緩急を測定したらよいのかという考えがまとまっていった。結局，このグループは，定規を階段の斜めに合わせ

て，分度器で角度を測って比べる方法になった。また，「はしごは階段なのか」という発言は，ほかのグループの生徒にも影響を及ぼしていた。例えば，ポートフォリオによれば，A グループのMは，自分の考えの中に，はしごは階段なのかという問い，疑問を書いている。また，E グループのGは，最後の振り返りの中のわからないこと疑問点で，「はしごは階段ですか？」と書いている。Gは，その疑問をずっと持ち続けていた。今回の授業では，はしごも階段であると教師の側では生徒の間と合意をしたつもりであった。しかし，結局，はしごを測定したグループはなかったことにみられるように，その合意は生徒の中にはできていなかった。

(2)測定方法に関する合意の形成

第４時で，階段の角度を確認するために，前回の場所をもう一度，測定した。そのときのＤグループのＫ，Ｗの活動の中で，階段の高さを測る方法について，合意が形成される場面があった。２人で協力しながら，自動販売機の近くの階段の縦，横，斜め，角度を測定した。その際，Wは，階段の縦の長さは，底面に対して垂直に測らないと三角比の考え方が使えないことに気づいた。そして，Ｋとそのことを話し合う中で，Ｋの中にもその考えが生まれ，教師に，「ここ（縦の長さ）　は直角に測らなければならないのか？」と質問してきたことにそれは現れている。そして，2 人で合意を形成し，協力して，高さを測定した。高さ以外にも，階段の断面の状況がわかる値をすべて測定していた。測ることの出来ない階段の鋭角の部分は，分度器に当てた定規を水平移動することにより求めていた。

(3)数学的活動における理解の状態

この課題に関する理解の状態を考える上での観点として，以下の３つを設定した。第１に角度に関する理解である。第２に三角比に関する理解である。第３に実際の階段の形状に関する理解である。

生徒の理解の状態は，これらを組み合わせて以下のような状態がある。

第１に，角度，三角比，実際の階段の関係をすべて理解している状態である。この状態においては，階段の長さの測定方法まで理論的に考えることができる。

第２に，角度と三角比は理解しているが，実際の階段との関係を理想化して理解している状態である。この状態においては，階段の測定が理論的に行われず，自分の中にできたイメージにより測定を行っている。三角比を使って角度を求める計算はできるが，その計算が実際の階段とは遊離している状態である。

第３に，角度だけに理解がとどまっている状態である。角度によっても階段の緩急は比べられることは理解している。実際の測定方法は，角度を正しく求めている場合とイメージで求めている場合がある。それは，現実の階段をどれだけ理解しているかで決まる。しかし，三角比に関する理解が不足しているため, 辺の比から角度を求めることができない。ただ，感覚的に縦と横の関係で階段の緩急が決まることは理解している。

この状態は，簡単に分けられるものではなく, 境界があいまいであり, 生徒によっては，第１と第２の間の状態も考えられうる。また，時間ともに第 3，第 2，第 1 と理解が進んでいくとは限らず，行ったり来たりの試行錯誤をすることもありうる。

学習指導要領の高等数学の立場からすると，第2, 第1の理解の状態が理想となっている。しかし，この課題のように，第３の理解の状態でも，生徒自らが興味を持って，この課題を考えることができた。この階段の課題は，この理解の状態を見るのに最適の課題であったといえる。

(4)数学的活動のコミュニケーションの軸

コミュニケーションの軸で以下の２点が重要であることがわかった。

第１に，クラス全体の話し合いの中で，積極的に様々な仮説や意見を言うことの重要性である。強制的に生徒に指名して仮説や意見を言わせることもできる。しかし，自然発生的に話し合いが起こるためには，生徒が話し

合いに加わろうとする意欲が必要となる。そのためには，まず適切な課題が必要となる。適切とは，目に見える形で問題を設定した具体的にイメージできる問題である。そこでは，階段の課題で，最初，生徒の中に具体的な階段がいろいろ思い浮かび，自然発生的に，話し合いが進んだことでわかる。また，その問題も，答えが定まっていないオープンエンドな問題がふさわしい。それにより，様々な仮説が生まれ，それを検証することにより，話し合いが起こってくる。次に，仮説は，例えばそれが明らかに間違ったものであっても大切にして，必ず，話し合いの話題にすることが必要となる。間違いを大事にする状況が，話し合いを活性化する。この話し合いにおける生徒の活動のプロセスを評価していくことが必要となる。

第２に，自分の考えたことを適切に文章や図や絵やグラフに表現できることである。これには，書くことの訓練と，どんな表現がよいのかの例や基準が必要となる。自分の仮説検証の姿をポートフォリオから振り返りレポートにまとめることは，より深い理解につながり，また，そのレポートを教師が見ることにより，最終的な生徒の活動の状況を評価することができる。そして，そのレポートは次の授業の参考資料としての例や基準とすることができる。数学教育においても，このコミュニケーションを評価していくことが重要になると考えられる。

(5)数学的活動における活動の軸

数学的活動における活動の部分も評価する必要がある。

まず，生徒自身がどれだけ活動に参加したか，協力したか，課題の活動に興味・関心を持ったかの面については，生徒自身が活動する中で求めた値で，計算し，考えることは重要である。例えば，C グループは，生徒玄関と近くの階段を比べる方法として，横の長さが長いほど緩やかであると考えた。そして，階段のすべての段の長さをミリ単位で測定して，その平均を求めて比べていた。

練習問題として，次の数値の平均を求めてみようという問題をやらされるよりは，生き生きと取り組むことができた。その原因は，第１に，その平均を求めることにより，緩急を比べることができるという目的があることで，第２に，計算対象となっている値が，自分たちが求めた意味のある数字だということである。

活動の目的があるからこそ，単調な作業にもかかわらず，グループで，真剣に取り組むことができた。そして，その記録はポートフォリオに残る。このように，活動の過程で，起こった数学的活動は積極的に評価していく必要がある。

次に，仮説と検証を繰り返しながら，自分の考えを変えていく場面である。これまでの高等学校の数学の授業は, 公式を証明よりも，その公式を使った練習問題を演習に力点を置く授業が多かった。そこでは，仮説と検証の動きは生まれない。生徒に考えさせ，実際に試してみる時間をできるだけ確保することが重要である。 そして，その仮説と検証をポートフォリオに記述する中で，なぜその考えを変えていったのかを考えていくことが重要な数学的活動になる。

10. おわりに

以上のことより，仮説と検証を重視した数学的活動の授業を実践することにより，以下３点に関する知見を得た。

第１に，生徒のポートフォリオからのフィードバックより，新しい授業案を計画することができた。また，そのフィードバックにより，教師は，新しい課題（カリキュラム）を考察することができた。これは，生徒の数学的活動が，授業，教師にフィードバックしさらにその活動を活性化していくことにつながった。

第２に，数学的活動にコミュニケーションの軸を取り入れることにより，仮説と検証の過程が活性化され，グループの話し合いにより，生徒の考えに変化が生まれ，試行錯誤，仮説と検証を繰り返すことにより，理解の深まりにつながった。それは, 次の生徒の記述に表れている。

「自分１人じゃ考えつかない事がみんなの意見のかわし合いで良い方法が見つかった。三角比を使うことによって角度から長さ，いろいろな直角三角形の形のものがわかることがわかった。」

第３に，具体物があり，その具体物に依存したレベルを保証できる課題に対して，活動を中心とし，試行錯誤や間違ったことを大切にしていくこの授業は，今までの数学の授業にはない新鮮なものであり，生徒が意欲的に課題に取り組むことができた。

また，この階段の課題に対しては，生徒の

「階段といっても色々な階段があってとても楽しくできました。学校の階段を計りにいったり階段のモケイを作ったりと，ただ階段といってもたくさんやることがありました。高校に入って久しぶりに楽しく授業ができてよかった。」という記述に見られるように，生徒の興味を引き，生徒が自分なりの理解ができる課題であった。そして，その理解には，階段という具体物に依存した理解，具体物を抽象化した角度と辺の比（三角比）の理解と，２つの理解の状態があることがわかった。これまではこの階段レベルの理解の活動を無視する傾向にあった。しかし，このレベルも数学の１つの理解のしかたであり，それを認めることも重要であり，そのことが活動の楽しさにつながっていく。

このように生徒の活動を，ポートフォリオにより，生徒自身，教師，授業，カリキュラムにフィードバックすることは，数学的活動を実質的なものにするため必要であることがわかった。

引用･参考文献

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education . Netherlands ： Kluwer Academic Publishers.

足立久美子.（1993）. 実験数学のすすめ（数学教育協議会　銀林浩編）. 国土社.

加藤孝次・安藤輝次. (1999). 総合学習のためのポートフォリオ評価. 黎明書房.

加納寛子. (2000). 数学学習でのポートフォリオー活動中ポートフォリオの学習と評価. 指導と評価 2000年７月号. pp45-51. 日本教育評価研究会

加納寛子（編）.（2002）. ポートフォリオで情報科をつくるー新しい授業実践と評価の方法. 北大路書房.

銀林浩（監修）.（1984）. 算数･数学教育の最前線：問題点早わかり. 明治図書出版.

佐伯胖. (1982). 学力と思考. 第一法規出版.

佐藤学（1995）. 学びへの誘い（佐伯胖，藤田英典，佐藤学編）第 4 章　学びの文化領域. 東京大学出版会.

島田茂（編）. (1977). 算数・数学科のオープンエンドアプローチ：授業改善への新しい提案. みずうみ書房.

高野 剛彦. (2001). 新しい評価法としてのポートフォリオ評価（未公刊）

筑波大学数学教育学研究室翻訳監修. (2001). NCTM「新世紀をひらく学校数学　ー学校数学のための原則とスタンダードー」. 筑波大学数学教育学研究室.

戸田盛和. (1981). 物理入門コース力学. pp178-179. 岩波書店.

Ｂ．Ｄ．シャクリー他著.（1997）. ポートフォリオをデザインする：教育評価への新しい挑戦（田中耕治監訳）. ミネルヴァ書房.

文部省.（1999）. 高等学校学習指導要領解説数学編理数編. 実教出版.

ランパート，M.（1990）. 真正の学びを創造する一数学がわかることと数学を教えること（秋田喜代美訳）. シリーズ学びと文化①学びへの誘い. 東京大学出版会.